

Московский государственный  
университет  
им. М.В. Ломоносова



Физический факультет  
Кафедра теоретической физики

Чёрные дыры в теории Эйнштейна и её обобщениях

Курсовая работа  
студента 2-ого курса Попова А.А.

Научный руководитель:  
проф. Гальцов Д.В.

Москва, 2008.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Гравитационный коллапс</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Теоремы о горизонте</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Диаграммы Картера–Пенроуза</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Некоторые решения уравнений Эйнштейна</b>	<b>8</b>
4.1	Решение Шварцшильда . . . . .	9
4.2	Решение Рейсснера–Нордстрема . . . . .	12
4.2.1	$M <  Q $ , «голая» сингулярность . . . . .	12
4.2.2	$M >  Q $ . . . . .	13
4.2.3	$M =  Q $ , экстремальное решение . . . . .	14
4.3	Дилатонная черная дыра . . . . .	16
4.4	Решение Керра . . . . .	18
4.4.1	$M^2 < a^2$ , «голая» сингулярность . . . . .	19
4.4.2	$M^2 > a^2$ . . . . .	20
4.4.3	$M^2 = a^2$ , экстремальное решение . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Механика черных дыр</b>	<b>22</b>
5.1	Геодезические конгруэнтности . . . . .	22
5.1.1	Основные понятия . . . . .	22
5.1.2	Свойства геодезических конгруэнтностей . . . . .	24
5.2	Интегралы Комара . . . . .	25
5.3	Законы механики черных дыр . . . . .	26
5.3.1	Нулевой закон . . . . .	26
5.3.2	Формула Смарра . . . . .	27
5.3.3	Первый закон . . . . .	29
5.3.4	Второй закон . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Излучение Хокинга и термодинамика черных дыр</b>	<b>31</b>
6.1	Излучение Хокинга . . . . .	31
6.2	Термодинамика черных дыр . . . . .	32

## 1 Гравитационный коллапс

Как известно, звёзды удерживаются от гравитационного сжатия силами давления горячего газа. Однако на поздних стадиях эволюции термоядерный синтез перестаёт быть энергетически выгодным и прекращается, лишённая источников энергии, звезда остывает и сжимается. Тем не менее, даже при нулевой температуре давление в ней оказывается отличным от нуля, что связано с давлением вырожденного электронного газа. Вырождение электронов наступает при концентрации  $n_e$  порядка

$$n_e^{-1/3} \sim \frac{\hbar}{\langle p_e \rangle} \quad (1)$$

(Комптоновская длина волны), где  $\langle p_e \rangle$  — средний импульс электронов. Тогда средняя энергия такого электрона в нерелятивистском случае составляет

$$\langle E \rangle \sim \frac{\langle p_e \rangle^2}{m_e}, \quad (2)$$

а суммарная кинетическая энергия всех электронов —

$$E_{\text{kin}} \sim n_e R^3 \langle E \rangle \sim \frac{\hbar^2}{m_e} n_e^{5/3} R^3, \quad (3)$$

где  $R$  — радиус звезды,  $m_e$  — масса электрона. Считая, что звезда состоит преимущественно из водорода, запишем, что

$$n_e \sim \frac{M}{m_p R^3}, \quad (4)$$

где  $M$  есть масса звезды, а  $m_p$  — масса протона. Подставим (4) в (3):

$$E_{\text{kin}} \sim \frac{\hbar^2}{m_p} \left( \frac{M}{m_p} \right)^{5/3} \frac{1}{R^2}. \quad (5)$$

Находя экстремум (минимум) выражения

$$E \sim E_{\text{kin}} + E_{\text{grav}}, \quad (6)$$

где

$$E_{\text{grav}} \sim -\frac{GM^2}{R}, \quad (7)$$

получаем:

$$R_{\text{min}} \sim \frac{\hbar^2 M^{-1/3}}{G m_e m_p^{5/3}}. \quad (8)$$

Т.о., в рассмотренном нерелятивистском приближении гравитационное сжатие звезды любой массы рано или поздно будет остановлено давлением вырожденного электронного газа. Образовавшийся в результате этого процесса объект называется *белым карликом*.

Использованное приближение подразумевает, что  $\langle p_e \rangle \ll m_e c$ , что ограничивает массу звезды сверху. Рассмотрим теперь релятивистский электронный газ. Для него

$$\langle E \rangle \approx \langle p_e \rangle c = \hbar c n_e^{1/3}, \quad (9)$$

откуда

$$E_{\text{kin}} \sim n_e R^3 \langle E \rangle = \hbar c \left( \frac{M}{m_p} \right)^{4/3} \frac{1}{R}, \quad (10)$$

и (6) имеет минимум лишь при

$$M_C \sim \frac{1}{m_p^2} \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2}. \quad (11)$$

При меньшей массе звезды её радиус будет увеличиваться, пока электронный газ не перестанет быть релятивистским и не наступит равновесие между силами гравитации и давления вырожденного газа. Однако сжатие звёзд

бóльших масс в принципе не может быть остановлено давлением вырожденного электронного газа. Критическое значение массы  $M_C$  называется *пределом Чандрасекара (Chandrasekhar)*. Более точные вычисления дают оценку  $M_C \approx 1.4M_\odot$ .

Тем не менее, полученные результаты ещё не говорят о том, что звезда будет сжиматься неограниченно. Рассмотрим релятивистский вырожденный электронный газ, настолько горячий, что энергия электронов оказывается достаточной для обратного  $\beta$ -распада



Эта реакция не может прийти в равновесие с обратной



т.к. нейтрино почти не взаимодействуют с веществом и легко покидают звезду. При этом не может идти и  $\beta$ -распад



поскольку все электронные состояния, энергия которых меньше энергии активации реакции (12), уже заняты. Звезда продолжает коллапсировать до тех пор, пока сжатие не будет остановлено силами давления вырожденного нейтронного газа. Если достигается равновесие, такой объект называется *нейтронной звездой*.

Однако так же, как и для белых карликов, для нейтронных звёзд существует предельное значение массы, при превышении которого давление вырожденного нейтронного газа уже не может остановить коллапс. Это критическое значение называется *пределом Оппенгеймера–Волкова* и составляет около  $3M_\odot$ . В настоящее время не известны механизмы, способные предотвратить дальнейшее сжатие более массивных звёзд. Если их действительно не существует, сжатие становится неограниченным и с определённой скоростью формируется *чёрная дыра*.

**Определение 1.** *Чёрной дырой* называется область пространства-времени, из которой никакой сигнал не может достигнуть бесконечно удалённого наблюдателя.

Отметим, что т.к. плотность вещества, заключённого в сфере Шварцшильдовского радиуса, растёт с ростом его массы, существует некоторая масса, при превышении которой звезда неминуемо станет чёрной дырой (в смысле определения 1). Приведённые же в этом разделе оценки лишь конкретизируют это критическое значение массы.

## 2 Теоремы о горизонте

Для введения понятия горизонта событий потребуется несколько вспомогательных определений. Рассмотрим пространство-время  $(M, g)$ , где  $M$  — множество точек пространства событий, а  $g$  — заданная на нём метрика.

**Определение 2.** Пространство-время  $(M, g)$  назовём *асимптотически простым*, если существует гладкое многообразие  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  такое, что

1.  $\tilde{M} = M \cup \partial\tilde{M}$ , где  $\partial\tilde{M}$  обозначает границу множества  $\tilde{M}$ ;
2.  $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Lambda^2 g_{\mu\nu}$ , где  $\Lambda$  — определённая на  $\tilde{M}$  гладкая функция, причём  $\Lambda > 0$  на  $M$  и  $\Lambda = 0$  и  $d\Lambda \neq 0$  на  $\partial\tilde{M}$ ;
3. каждая изотропная геодезическая в  $M$  имеет две конечные точки в  $\partial M$ .

Отметим, что третье условие исключает из рассмотрения пространство-время чёрной дыры. Чтобы обойти это затруднение вводится понятие слабо асимптотически простого пространства-времени.

**Определение 3.** Пространство-время  $(M, g)$  называется *слабо асимптотически простым*, если существует открытое подмножество  $U \subset M$ , изометрическое<sup>1</sup> открытой окрестности  $\partial\tilde{M}$ , где  $\tilde{M}$  есть конформная компактификация некоторого (вообще не совпадающего с  $M$ ) асимптотически простого пространства-времени.

**Определение 4.** Пространство-время называется *(слабо) асимптотически плоским*, если оно является одновременно слабо асимптотически простым и *асимптотически пустым* в том смысле, что все источники гравитационного поля локализованы в конечной области пространства, т.е. что тензор Риччи  $R_{\mu\nu}$  исчезает в некоторой открытой окрестности  $\partial M$  в замыкании  $\bar{M}$ .

Асимптотически плоское пространство-время исключительно важно для рассмотрения, т.к. оно имеет ту же структуру пространственной  $i_0$  и изотропных  $\mathfrak{J}^\pm$  бесконечностей, что и пространство-время Минковского. Это позволяет ввести векторы, переходящие в асимптотике (вблизи  $i_0$ ) в векторы Киллинга пространства Минковского, и определить полную массу, импульс и угловой момент системы (см. раздел 5.2).

Пусть теперь  $M$  — слабо асимптотически плоское пространство-время,  $U \subset M$  — произвольное его подмножество. Обозначим символом  $J^-(U)$  причинное прошлое точек множества  $U$ , т.е. множество всех таких точек из  $M$ , каждая из которых лежит на времениподобной или изотропной кривой, проходящей через некоторую точку  $U$ , причём точка из  $U$  проходится в более поздний момент собственного времени. Множество

$$\dot{J}^- = \overline{J^-(U)} \setminus J^-(U) \quad (15)$$

есть граница замыкания  $\overline{J^-(U)}$ .

**Определение 5.** *Будущим горизонтом событий* пространства-времени  $M$  называется граница замыкания причинного прошлого  $\mathfrak{J}^+$ :

$$\mathcal{H}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \dot{J}^-(\mathfrak{J}^+). \quad (16)$$

Аналогично определяется *прошлый горизонт событий*.

Сформулированные ниже шесть утверждений носят название теорем о горизонте.

---

<sup>1</sup> Метрические пространства  $X$  и  $Y$  называются *изометрическими*, если  $\exists f: X \xrightarrow{f} Y$ , причём  $f$  сохраняет расстояния, т.е.  $\rho_X(x, y) = \rho_Y(f(x), f(y))$ , и  $\exists f^{-1}: Y \xrightarrow{f^{-1}} X$ .

**Утверждение 1.** Пространственная  $i_0$  и прошлая изотропная  $\mathfrak{J}^-$  бесконечности содержатся в  $J^-(\mathfrak{J}^+)$  и, следовательно, не могут содержаться в будущем горизонте событий  $\mathcal{H}^+$ .

**Утверждение 2.**  $\mathcal{H}^+$  есть нуль-гиперповерхность. Это следует из того факта, что горизонт событий образован поверхностями световых конусов.

**Утверждение 3.** Интервал между любыми двумя точками  $\mathcal{H}^+$  не является времениподобным.

**Доказательство.** Допустим, точки горизонта  $A$  и  $B$  могут быть соединены времениподобной кривой, т.е., например,  $A \in J^-(B)$ . По определению будущего горизонта событий, в любой окрестности точки  $A$  существует точка  $A'$ :  $A' \notin J^-(\mathfrak{J}^+)$ , а в любой окрестности точки  $B$  существует точка  $B'$ :  $B' \in J^-(\mathfrak{J}^+)$ . Времениподобная кривая  $AB$  может быть деформирована в близкую времениподобную кривую  $A'B'$ . Но в этом случае  $A' \in J^-(B') \subset J^-(\mathfrak{J}^+)$ , что противоречит выбору точки  $A'$ . Полученное противоречие доказывает утверждение.  $\square$

**Утверждение 4.** Генераторы<sup>2</sup>  $\mathcal{H}^+$  могут иметь прошлые конечные точки в том смысле, что генератор может быть продолжен в прошлое до конечной точки, не лежащей на  $\mathcal{H}^+$ .

**Утверждение 5 (теорема Пенроуза, Penrose).** Генераторы  $\mathcal{H}^+$  не имеют будущих конечных точек.

**Доказательство.** Рассмотрим для этого причинное прошлое  $J^-(S)$  некоторого множества  $S$ . Согласно утверждению 2, поверхность  $\mathcal{N} = J^-(S)$  является нуль-гиперповерхностью. Выберем точку  $p$ :

$$p \in \mathcal{N} \setminus \bar{S}. \quad (17)$$

Построим сферу  $\Omega$  с центром в точке  $p$ , имеющую конечный радиус, достаточно малый для того, чтобы она не пересекала  $\bar{S}$ . Выберем точки последовательности  $\{p_n\}$  так, что

$$\forall n \quad p_n \in \Omega \cap (J^-(S) \setminus \mathcal{N}), \quad (18)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = p. \quad (19)$$

Рассмотрим множество всех времениподобных кривых  $\gamma_i$ , проходящих через точки  $p_j$ . Они пересекают сферу  $\Omega$  в точках  $q_i$ . Множество  $\{q_i\}$  имеет предельную точку  $q$ , лежащую на  $\mathcal{N}$ . Предельная кривая  $\gamma$ , соединяющая точки  $p$  и  $q$ , не может быть пространственноподобной, т.к. является пределом времениподобных кривых. Однако утверждение 3 запрещает ей быть и времениподобной. Значит, кривая  $\gamma$  изотропна.

Совершенно аналогично, заменой  $p$  на  $q$ , строится точка  $r \in \mathcal{N}$  и изотропная кривая  $\delta$ , соединяющая точки  $q$  и  $r$  и также являющаяся отрезком некоторого генератора  $\mathcal{N}$ . Если отрезки  $\gamma$  и  $\delta$  представляют собой отрезки разных генераторов, то точки  $p$  и  $r$  можно соединить времениподобной

---

<sup>2</sup> Генератором нуль-гиперповерхности  $\mathcal{N}$  называется лежащая в  $\mathcal{N}$  изотропная геодезическая  $x^\mu(\lambda)$  с аффинным параметром  $\lambda$ , касательный вектор  $dx^\mu/d\lambda$  которой нормален поверхности  $\mathcal{N}$ .

кривой, полученной деформацией кривой  $(\gamma + \delta)$ , что противоречит утверждению 3.  $\square$

Из утверждений 4 и 5 следует, что изотропные геодезические могут входить в  $\mathcal{H}^+$ , но не могут его покидать.

**Утверждение 6 (теорема Хокинга, Hawking).** Горизонт событий стационарного<sup>3</sup> асимптотически плоского пространства-времени является горизонтом Киллинга<sup>4</sup>.

Приводим эту теорему без доказательства.

### 3 Диаграммы Картера–Пенроуза

Рассмотрим некоторое пространство-время и произведём его конформную компактификацию так, чтобы были удовлетворены сформулированные ниже условия. Пусть метрика при этом преобразуется следующим образом:

$$ds^2 \rightarrow d\tilde{s}^2 = \Lambda^2(\mathbf{r}, t) ds^2, \quad (20)$$

причём для всех конечных точек исходного пространства-времени  $\Lambda \neq 0$ . Выберем функцию  $\Lambda$  таким образом, чтобы все бесконечно удалённые точки в преобразованном пространстве-времени соответствовали конечным значениям аффинного параметра. Для этого следующее условие является необходимым:

$$\Lambda(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0 \quad (21)$$

при  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$  и/или  $|t| \rightarrow \infty$ . Компактификацию произведём, включив в преобразованное пространство-время точки, для которых  $\Lambda = 0$ , т.е. бесконечно удалённые. Заметим, что т.к. преобразование является конформным, оно сохраняет причинную структуру пространства-времени.

С помощью приведённых ниже примеров дадим понятие о *диаграммах Картера–Пенроуза (Carter–Penrose)*.

**Пример 1. Пространство Минковского.** Пространство-время Минковского имеет метрику

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (22)$$

Предъявим функцию  $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ , удовлетворяющую указанным выше требованиям. Для этого введём координаты

$$u = t - r, \quad v = t + r. \quad (23)$$

В них метрика (22) запишется следующим образом:

$$ds^2 = -du dv + \frac{(u - v)^2}{4} d\Omega^2. \quad (24)$$

Пусть теперь

$$u = \text{tg } \tilde{U}, \quad v = \text{tg } \tilde{V}, \quad (25)$$

<sup>3</sup>См. определение 6 на с. 9

<sup>4</sup>Теорема не утверждает, что это горизонт Киллинга для вектора  $\partial/\partial t$ .

где  $\{\tilde{U}, \tilde{V}\} \subset (-\pi/2, \pi/2)$  и  $\tilde{V} \geq \tilde{U}$ , поскольку  $r \geq 0$ . В новых координатах метрика имеет вид

$$ds^2 = \left(2 \cos \tilde{U} \cos \tilde{V}\right)^{-2} \left(-4d\tilde{U} d\tilde{V} + \sin^2(\tilde{V} - \tilde{U}) d\Omega^2\right). \quad (26)$$

Тогда можно выбрать

$$\Lambda = 2 \cos \tilde{U} \cos \tilde{V}. \quad (27)$$

Метрика конформно компактифицированного пространства-времени выглядит следующим образом:

$$d\tilde{s}^2 = \Lambda^2 ds^2 = -4d\tilde{U} d\tilde{V} + \sin^2(\tilde{V} - \tilde{U}) d\Omega^2. \quad (28)$$

Классифицируем бесконечно удалённые точки ( $\Lambda = 0$ ):

- $\tilde{U} = -\pi/2, \tilde{V} = \pi/2$  — пространственная бесконечность  $i_0$ ;
- $\tilde{U} = \pm\pi/2, \tilde{V} = \pm\pi/2$  — прошлая и будущая временные бесконечности  $i_{\pm}$ ;
- $\tilde{U} = -\pi/2, |\tilde{V}| \neq \pi/2$  — прошедшая изотропная бесконечность  $\mathfrak{I}^-$ ;
- $|\tilde{U}| \neq \pi/2, \tilde{V} = \pi/2$  — будущая изотропная бесконечность  $\mathfrak{I}^+$ .

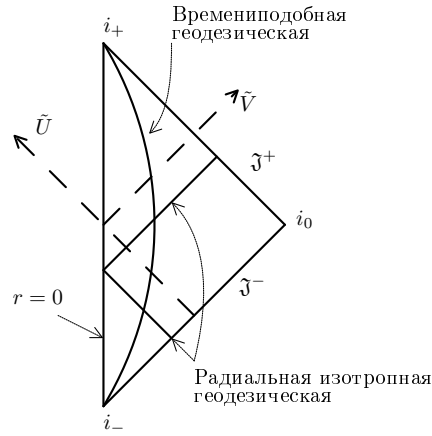


Рис. 1: Диаграмма Пенроуза пространства Минковского

На рис. 1 изображена диаграмма Пенроуза пространства-времени Минковского. Каждая её точка является 2-сферой. Радиальные изотропные геодезические идут под углом  $45^\circ$  из  $\mathfrak{I}^-$  до  $r = 0$  и затем к  $\mathfrak{I}^+$ , как показано на рисунке.

**Пример 2. Пространство Крускала.** Рассмотрим пространство-время, метрика которого задаётся выражением

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) du dv + r^2 d\Omega^2, \quad (29)$$



где

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (30)$$

— метрика на единичной 2-сфере. Ниже будет показано, что эта метрика отвечает решению Шварцшильда в некоторой системе координат. Введём новые координаты по формуле (25). В них

$$ds^2 = \left(2 \cos \tilde{U} \cos \tilde{V}\right)^{-2} \cdot \left(-4 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tilde{U} d\tilde{V} + 4r^2 \cos^2 \tilde{U} \cos^2 \tilde{V} d\Omega^2\right). \quad (31)$$

Подставляя в это выражение

$$r^* = \frac{v - u}{2} = \frac{\sin(\tilde{V} - \tilde{U})}{2 \cos \tilde{U} \cos \tilde{V}}, \quad (32)$$

запишем преобразованную метрику:

$$d\tilde{s}^2 = \Lambda^2 ds^2 = -4 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tilde{U} d\tilde{V} + \left(\frac{r}{r^*}\right)^2 \sin^2(\tilde{V} - \tilde{U}) d\Omega^2, \quad (33)$$

где  $\Lambda$  определяется формулой (27).

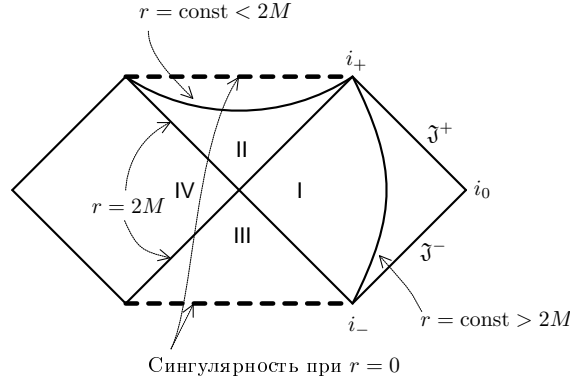


Рис. 2: Диаграмма Пенроуза пространства Крускала

Диаграмма Пенроуза пространства-времени Крускала изображена на рис. 2. Толстые штриховые линии изображают неустранимую сингулярность при  $r = 0$ . Эта диаграмма будет рассмотрена подробнее в разделе, посвящённом Шварцшильдовской чёрной дыре.

## 4 Некоторые решения уравнений Эйнштейна

В этом разделе мы познакомимся с некоторыми стационарными чёрными дырами, возникающими в теории Эйнштейна, а именно, решениями Шварцшильда, Рейсснера–Нордстрёма, Керра. Мы не будем здесь рассматривать решение Керра–Ньюмена. Также мы кратко рассмотрим дилатонную невращающуюся чёрную дыру, появляющуюся в теории струн.

## 4.1 Решение Шварцшильда

**Определение 6.** Асимптотически плоское пространство-время называется *стационарным*, если существует векторное поле Киллинга, являющееся времениподобным вблизи пространственной бесконечности  $i_0$ , т.е. если оно может быть нормировано таким образом, что  $k^2 = -1$  вблизи  $i_0$ .

**Определение 7.** Стационарное пространство-время называется *статическим*, если оно инвариантно относительно обращения времени.

Сферически-симметричное решение вакуумных уравнений Эйнштейна для статического пространства-времени называется *решением Шварцшильда* (*Schwarzschild*). Метрика Шварцшильда записывается в виде

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (34)$$

Здесь параметр  $M$  отождествляется с массой чёрной дыры,

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (35)$$

— метрика на единичной 2-сфере, и мы используем естественную систему единиц:

$$G = 1, \quad c = 1. \quad (36)$$

Вывод решения Шварцшильда можно найти в [4, 10]. Согласно теореме Израэля (Israel), предъявленная метрика является единственным решением, удовлетворяющим приведённым условиям.

Представленная выражением (34) метрика оказывается сингулярной при  $r = 0$  и  $r = 2M$ . Однако сингулярность при  $r = 2M$  является координатной. Чтобы показать это, запишем метрику в *координатах Крускала–Зекереса* (*Kruskal–Szekeres*). Рассмотрим радиальную изотропную геодезическую, для которой (34) запишется в виде:

$$0 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2. \quad (37)$$

Отсюда находим:

$$dt^2 = \frac{dr^2}{(1 - 2M/r)^2} \equiv (dr^*)^2, \quad (38)$$

где

$$r^* = r + 2M \ln \left| \frac{r - 2M}{2M} \right| \quad (39)$$

— *радиальная координата Ригги–Уилера* (*Regge–Wheeler*). Введём следующие координаты, называемые *координатами Эддингтона–Финкельштейна* (*Eddington–Finkelstein*):

$$v = t + r^*, \quad (40)$$

$$u = t - r^*. \quad (41)$$

Отметим, что на радиальных геодезических  $v = \text{const}$  или  $u = \text{const}$ . Запишем (34) в этих координатах:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) du dv + r^2 d\Omega^2. \quad (42)$$

Теперь определим координаты Крускала–Зекереса:

$$U = -e^{-u/4M}, \quad (43)$$

$$V = e^{v/4M}. \quad (44)$$

В этих координатах метрика Шварцшильда записывается следующим образом:

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r}e^{-r/2M}dU dV + r^2 d\Omega^2. \quad (45)$$

причём

$$UV = -\left(\frac{r-2M}{2M}\right)e^{r/2M}. \quad (46)$$

Метрика Шварцшильда имеет особенность на  $r = 2M$ , однако (45) остаётся несингулярной при всех  $r > 0$ . Т.о., в координатах Крускала метрика Шварцшильда может быть аналитически продолжена на все  $r > 0$ .

В разделе 3 мы исследовали причинную структуру пространства-времени с метрикой (42), не вдаваясь в его физическую природу. Теперь мы можем заявлять, что на рис. 2 изображена диаграмма Пенроуза Шварцшильдовской чёрной дыры. Она содержит две асимптотически плоские области I и IV, связанные между собой пространственным образом. Вещество, пересекающее будущий горизонт событий на границе областей I и II, неминуемо попадает на пространственноподобную центральную сингулярность. Ветвь сингулярности при  $r = 0$  в области III отражает факт обратимости уравнений Эйнштейна во времени и соответствует *белой дыре*. Однако белые дыры считаются неустойчивыми [5].

**Определение 8.** Нуль-гиперповерхность  $\mathcal{N}$  называется *горизонтом Киллинга* вектора Киллинга  $\xi$ , если на ней вектор  $\xi$  нормален  $\mathcal{N}$ .

Пусть  $l$  — нормаль нуль-гиперповерхности  $\mathcal{N}$ . Т.к.  $l^2 = 0$ , вектор  $l$  также является и касательным к  $\mathcal{N}$ , и

$$l^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (47)$$

для некоторой кривой  $x^\mu(\lambda) \in \mathcal{N}$ . По свойствам нуль-гиперповерхностей [1, с. 28], эта кривая является геодезической, т.е.

$$l \cdot D l^\mu = 0 \quad (48)$$

для аффинной параметризации. Если вектор Киллинга  $\xi$  также нормален  $\mathcal{N}$ , то

$$\xi = fl, \quad (49)$$

где  $f$  — некоторая скалярная функция. Тогда с учётом (48)

$$\xi \cdot D\xi^\mu = \kappa\xi^\mu \quad (50)$$

на  $\mathcal{N}$ , где величина

$$\kappa = \xi \cdot \ln|f| \quad (51)$$

называется *поверхностной гравитацией*. Можно показать [1], что на *бифуркационном горизонте Киллинга*<sup>5</sup> сохраняется  $\kappa^2$ .

Получим выражение для поверхностной гравитации Шварцшильдовской чёрной дыры. Для этого выразим вектор сдвига во времени  $k = \partial/\partial t$ , являющийся вектором Киллинга для метрики (34), в координатах Крускала. Рассмотрим преобразование  $t \rightarrow t + c$ . При этом

$$U \rightarrow e^{-c/4M}U, \quad V \rightarrow e^{c/4M}V. \quad (52)$$

Раскладывая эти соотношения в ряд до первого порядка малости по  $c$ , получаем:

$$\delta U = -\frac{c}{4M}U, \quad \delta V = \frac{c}{4M}V. \quad (53)$$

Т.к. вектор Киллинга определяется с точностью до постоянного множителя, можно выбрать

$$k = \frac{1}{4M} \left( V \frac{\partial}{\partial V} - U \frac{\partial}{\partial U} \right). \quad (54)$$

Гиперповерхность  $\mathcal{N}$ :  $r = 2M$  в координатах Крускала соответствует  $U = 0$  или  $V = 0$ , поэтому вектор  $k$  определяется на ней неоднозначно. Рассмотрим одну её ветвь  $\mathcal{N}_U$ :  $U = 0$ . На ней

$$k = \frac{1}{4M} V \frac{\partial}{\partial V} = fl, \quad (55)$$

где  $l = \partial/\partial V$ . Докажем, что кривая  $x^\mu(\lambda)$ , для которой

$$l^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (56)$$

является генератором гиперповерхности  $\mathcal{N}_U$ . Для этого построим нормаль семейства гиперповерхностей  $U = \text{const}$ :

$$n = \tilde{f} g^{\mu\nu} \partial_\nu U \partial_\mu = -\tilde{f} \frac{r}{16M^3} e^{r/2M} \frac{\partial}{\partial V}, \quad (57)$$

т.о., вектор  $l \propto n$  является нормалью гиперповерхности  $U = \text{const}$ . Т.к.

$$n^2 \propto l^2 = g_{\mu\nu} l^\mu l^\nu = g_{VV} = 0, \quad (58)$$

то каждая поверхность семейства  $U = \text{const}$  является нуль-гиперповерхностью. Как известно [1, с. 28],

$$n \cdot Dn^\mu = \frac{d \ln \tilde{f}}{d\lambda} n^\mu + \frac{1}{2} n^{2,\mu} - n^2 \partial^\mu \ln \tilde{f}, \quad (59)$$

где  $n$  — нормаль к гиперповерхности, определённая выше. Подставляя сюда  $l$  и учитывая, что всюду  $l^2 = 0$ ,  $l^{2,\mu} = 0$ , получаем, что надлежащим выбором  $\tilde{f}$ , а именно,  $\tilde{f} = 1$  можно добиться аффинной параметризации кривой  $x^\mu(\lambda)$ . Т.о., доказано, что она является генератором гиперповерхности  $\mathcal{N}_U$ .

<sup>5</sup>Смысл этого понятия следующий. Т.к.  $\xi$  нормален  $\mathcal{N}$ , лежащая в  $\mathcal{N}$  интегральная кривая  $\xi$  является частью генератора этой нуль-гиперповерхности. Можно показать, что при  $\kappa \neq 0$  эта интегральная кривая совпадает лишь с частью генератора, но не покрывает его весь. При этом возникает бифуркационная 2-сфера ( $U = V = 0$  в координатах Крускала), на которой сходятся две ветви интегральных кривых для  $\xi$ . В случае вырожденного горизонта ( $\kappa = 0$ ) бифуркационная сфера не возникает, и интегральная кривая для  $\xi$  полностью покрывает генератор. Подробнее см. [1].

Т.к.  $k \propto l$ ,  $\mathcal{N}_U$  есть горизонт Киллинга для вектора  $k$ . Доказанное утверждение позволяет применить формулу (51) для вычисления поверхностной гравитации:

$$\kappa = k \cdot \partial \ln |f| = \frac{V}{4M} \frac{\partial}{\partial V} \ln \left| \frac{V}{4M} \right| = \frac{1}{4M}. \quad (60)$$

Результат для случая  $V = 0$  получается совершенно аналогично, однако ответ отличается знаком. Это может служить иллюстрацией к понятию бифуркационного горизонта Киллинга.

## 4.2 Решение Рейсснера–Нордстрёма

Обобщением решения Шварцшильда на случай пространства-времени, заполненного электромагнитным полем, является *решение Рейсснера–Нордстрёма* (*Reissner–Nordström*). Метрика этого решения записывается в виде

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (61)$$

где параметры  $M$  и  $Q$  отождествляются с массой и электрическим зарядом чёрной дыры соответственно, а  $d\Omega^2$ , как и раньше, обозначает метрику на единичной 2-сфере. Оказывается удобным переписать (61) в виде

$$ds^2 = - \frac{\Delta}{r^2} dt^2 + \frac{r^2}{\Delta} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (62)$$

где

$$\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2 = (r - r_+)(r - r_-), \quad (63)$$

а  $r_{\pm}$  есть решения уравнения  $\Delta = 0$ :

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (64)$$

Знак величины под корнем этого выражения определяет три принципиально различных случая. Рассмотрим их по отдельности.

### 4.2.1 $M < |Q|$ , «голая» сингулярность

При  $M < |Q|$  уравнение  $\Delta = 0$  не имеет действительных корней, и неустраиваемая сингулярность при  $r = 0$  оказывается открытой. Возможность возникновения подобного рода объектов в результате гравитационного коллапса запрещается *постулатом о космической цензуре* (*cosmic censorship conjecture*).

**Утверждение 7 (постулат о космической цензуре).** «Голые» сингулярности не могут формироваться в результате гравитационного коллапса в асимптотически плоском пространстве-времени, которое является несингулярным на некоторой начальной частичной поверхности Коши.

Под «голой» сингулярностью понимается неустраиваемая сингулярность, не окружённая горизонтом событий. Гипотеза о космической цензуре не доказана и является предположением.

Кроме противоречия постулату о космической цензуре, в случае  $M < |Q|$  кулоновское отталкивание преобладает над гравитационным притяжением, и объект оказывается неустойчивым. Резюмируя, охарактеризуем этот класс решений как физически невозможный.

#### 4.2.2 $M > |Q|$

В этом случае при  $r = r_{\pm}$  метрика (61) сингулярна, однако это лишь координатная сингулярность, что может быть показано аналогично тому, как это было сделано для Шварцшильдовской дыры (с. 9). Действительно, определим радиальную координату типа Ригги–Уилера:

$$dr^* = \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}}, \quad (65)$$

откуда (с точностью до постоянного слагаемого)

$$r^* = r + \frac{1}{2\kappa_+} \ln \frac{|r - r_+|}{r_+} + \frac{1}{2\kappa_-} \ln \frac{|r - r_-|}{r_-}, \quad (66)$$

где мы обозначили

$$\kappa_{\pm} = \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{2r_{\pm}^2}. \quad (67)$$

Как и ранее, определим координаты Эддингтона–Финкельштейна по формулам (40), (41). Например, во входящих координатах Эддингтона–Финкельштейна метрика Рейсснера–Нордстрёма (61) запишется следующим образом:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2} dv^2 + 2dv dr + r^2 d\Omega^2. \quad (68)$$

Она несингулярна всюду при  $r > 0$ . Т.о., сингулярность (61) при  $r = r_{\pm}$  есть лишь особенность выбранной системы координат.

Обозначим символами  $\mathcal{N}_{\pm}$  гиперповерхности  $r = r_{\pm}$ . Рассматривая нормаль к гиперповерхности  $r = \text{const}$  и учитывая, что в (61)  $g^{rr}$  исчезает на  $r = r_{\pm}$ , легко показать, что  $\mathcal{N}_{\pm}$  есть нуль-гиперповерхности.

**Утверждение 8.** Нуль-гиперповерхности  $\mathcal{N}_{\pm}$  являются горизонтами Киллинга для вектора  $k = \partial/\partial v$  с поверхностными гравитациями  $\kappa_{\pm}$ .

**Схема доказательства.** Доказательство этого утверждения не содержит ничего принципиально нового и в значительной мере повторяет вывод выражения для поверхностной гравитации Шварцшильдовской дыры, поэтому приведём здесь лишь схему доказательства.

Вектор  $k = \partial/\partial v$  является вектором Киллинга, т.к. метрика (68) не зависит от  $v$ . Вектор  $k$  соответствует вектору  $\partial/\partial t$  в координатах Шварцшильда. Находим нормали на  $\mathcal{N}_{\pm}$ :

$$l_{\pm} = f_{\pm} \frac{\partial}{\partial v}, \quad (69)$$

где скалярные функции  $f_{\pm}$  выбираются так, что  $l_{\pm} \cdot Dl_{\pm}^{\mu} = 0$ . Прямым вычислением убеждаемся, что

$$k \cdot Dk^{\mu} = \kappa_{\pm} k^{\mu}. \quad (70)$$

Т.к.  $k$  нормирован надлежащим образом ( $k^2 \rightarrow -1$  вблизи  $i_0$ ), величины  $\kappa_{\pm}$  определяют поверхностную гравитацию.  $\square$

Каждый горизонт Киллинга  $\mathcal{N}_{\pm}$  будет иметь бифуркационную сферу, на которой поверхностные гравитации будут менять знак, как это было для Шварцшильдовского решения.

Введём теперь координаты типа Крускала–Зекереса, что позволит построить диаграмму Пенроуза для заряженной чёрной дыры:

$$U^\pm = -e^{-\kappa_\pm u}, \quad V^\pm = e^{\kappa_\pm v}. \quad (71)$$

Подставим (71) в выражение для метрики, аналогичное (42). Для горизонта  $r = r_+$  (61) переписется в виде

$$ds^2 = -\frac{r_+ r_-}{\kappa_+^2} \frac{e^{-2\kappa_+ r}}{r^2} \left( \frac{r_-}{r - r_-} \right)^{\kappa_+/\kappa_- - 1} dU^+ dV^+ + r^2 d\Omega^2, \quad (72)$$

где

$$U^+ V^+ = -e^{2\kappa_+ r} \frac{r - r_+}{r_+} \left( \frac{r - r_-}{r_-} \right)^{\kappa_+/\kappa_-}. \quad (73)$$

Для горизонта  $r = r_-$

$$ds^2 = -\frac{r_+ r_-}{\kappa_-^2} \frac{e^{-2\kappa_- r}}{r^2} \left( \frac{r_+}{r - r_+} \right)^{\kappa_-/\kappa_+ - 1} dU^- dV^- + r^2 d\Omega^2, \quad (74)$$

где

$$U^- V^- = -e^{-2\kappa_- r} \frac{r_- - r}{r_-} \left( \frac{r_+ - r}{r_+} \right)^{\kappa_-/\kappa_+}. \quad (75)$$

Метрика (72) позволяет «проникнуть» сквозь горизонт  $r = r_+$ , но остаётся сингулярной на  $r = r_-$ . Тем не менее метрика (74) несингулярна на нижнем горизонте. Т.о., возможно аналитическое продолжение метрики Рейсснера–Нордстрёма (61) на всю область  $r > 0$ . Заметим, что центральная сингулярность в координатах (71) с индексом «−» является времениподобной. Подмногообразия, покрываемые «+»- и «−»-координатами, сшиваются в области  $r_- < r < r_+$ . Этого достаточно, чтобы построить диаграмму Пенроуза заряженной чёрной дыры, изображённую на рис. 3. Заметим, что в силу симметрии подмногообразия, покрываемого «−»-координатами, относительно инверсии времени, диаграмма неограниченно продолжается во времени в обе стороны.

Рассмотрим подробнее область II диаграммы Пенроуза. Введём в ней входящие координаты Эддингтона–Финкельштейна  $(v, r, \theta, \varphi)$  и рассмотрим траекторию, на которой фиксированы все координаты, кроме  $v$ . С помощью (68) убеждаемся, что эта траектория является пространственноподобной кривой. Выражая  $ds$  и интегрируя по  $v$  в бесконечных пределах, находим, что длина выделенной кривой бесконечна. Т.о., под горизонтом  $r = r_+$  существует некая внутренняя пространственная бесконечность.

#### 4.2.3 $M = |Q|$ , экстремальное решение

При  $M = |Q|$  метрика 61 принимает вид

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{M}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (76)$$

Введём радиальную координату Ригги–Уилера так, что

$$dr^* = \frac{dr}{1 - M/r}, \quad (77)$$





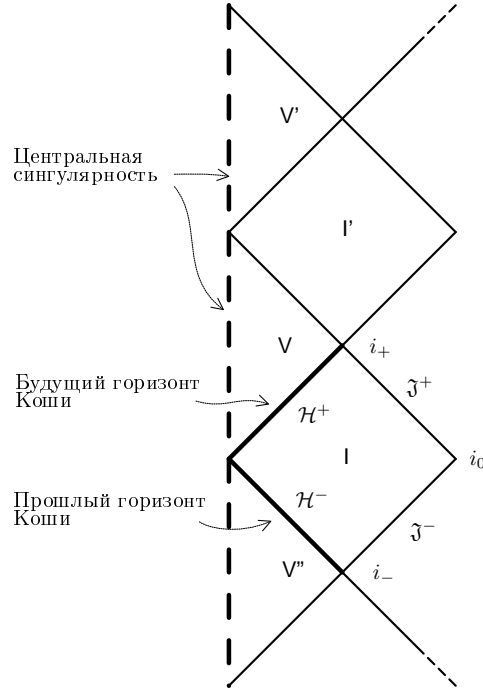


Рис. 4: Диаграмма Пенроуза экстремального решения Рейсснера–Нордстрёма

### 4.3 Дилатонная чёрная дыра

В этом разделе мы кратко рассмотрим некоторые свойства заряженных чёрных дыр в теории струн. Подробную информацию можно найти в [8].

Теория струн вносит поправки планковского масштаба в решение Шварцшильда. Т.о., всюду, кроме области центральной сингулярности, классическое решение остаётся хорошим приближением статической незаряженной чёрной дыры большой (по сравнению с планковской) массы. По-другому обстоит дело с заряженной дырой, поскольку теория струн предсказывает появление дилатона для любого тензора электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}$ , не равного тождественно нулю. В результате решение Рейсснера–Нордстрёма, рассмотренное в предыдущем разделе, не является даже приближением [7].

Искомое решение для статической заряженной чёрной дыры получается из рассмотрения действия вида

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (-R + 2(\nabla\varphi)^2 + e^{-2\varphi} F^2), \quad (79)$$

где  $g = \det g_{\mu\nu}$ ,  $R$  — скалярная кривизна,  $F_{\mu\nu}$  — тензор электромагнитного поля, а  $\varphi$  — скалярное поле дилатона. В наиболее общем виде метрика решения записывается следующим образом:

$$ds^2 = -\lambda^2 dt^2 + \lambda^{-2} dr^2 + R^2 d\Omega^2, \quad (80)$$

где  $\lambda = \lambda(r)$ ,  $R = R(r)$  — некоторые функции, а  $d\Omega^2$  — метрика на единичной 2-сфере. Может быть найден конкретный вид функций  $\lambda$  и  $R$  [7]; при

их подстановке (80) представляется в виде

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r \left(r - \frac{Q^2 e^{2\varphi_0}}{M}\right) d\Omega^2, \quad (81)$$

где  $M$  — масса,  $Q$  — магнитный заряд, а  $\varphi_0$  — асимптотическая величина дилатона.

Заряженная чёрная дыра в теории струн описывается тремя величинами: массой, магнитным зарядом и дилатонным зарядом

$$D \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{Q^2 e^{2\varphi_0}}{2M}. \quad (82)$$

Тем не менее, дилатонный заряд не является независимым параметром, т.к. однозначно определяется массой и магнитным зарядом при заданном  $\varphi_0$ . Магнитный заряд может быть заменён на электрический с одновременной сменой знака дилатонного заряда [7]. Случай наличия и электрического, и магнитного зарядов рассматриваться здесь не будет.

Метрика (81) сингулярна при  $r = 0$ ,  $r = r_+ = 2M$  и  $r = r_- = Q^2 e^{2\varphi_0} / M$ . Заметим, что при  $r = r_-$  площадь сферы  $r = \text{const}$ ,  $t = \text{const}$  обращается в нуль. Этот факт является координатно-независимым, т.е. при  $r = r_-$  имеем неустранимую сингулярность. Если  $r_+ > r_-$  метрика (81) почти не отличается от Шварцшильдской; единственное отличие состоит в том, что площади сфер  $r = \text{const}$ ,  $t = \text{const}$  оказываются меньше, чем в решении Шварцшильда, но остаются конечными. Т.к. это обстоятельство не может изменить структуру пространства-времени, диаграмма Пенроуза для случая  $r_+ > r_-$  совпадает с изображённой на рис. 2 с той лишь разницей, что неустранимой сингулярности соответствует значение  $r = r_-$ . Поверхностная гравитация для такой чёрной дыры совпадает с вырезанием, полученным в разделе 4.1.

При  $r_+ < r_-$  неустранимая сингулярность оказывается не закрытой горизонтом. Соответствующая диаграмма Пенроуза приведена на рис. 5 слева. Экстремальное решение  $r_+ = r_-$  реализуется при

$$Q^2 = 2e^{-2\varphi_0} M^2. \quad (83)$$

Его диаграмма Пенроуза получается как предельный случай решения при  $r_+ > r_-$  и изображена на рис. 5 справа. В этом случае горизонт событий оказывается сингулярным.

Можно получить те же результаты, вводя замену

$$r_- = r_0 / \varepsilon, \quad (84)$$

$$r_+ = r_0 / \varepsilon + \varepsilon b, \quad (85)$$

$$r = r_0 / \varepsilon + \varepsilon \rho, \quad (86)$$

$$\tau = t / \varepsilon, \quad (87)$$

и устремляя  $\varepsilon \rightarrow 0$ , как было сделано в [9]. В результате метрика (81) запишется в виде

$$ds^2 = -\frac{r-b}{r_0} d\tau^2 + \left(\frac{r-b}{r_0}\right)^{-1} d\rho^2 + r_0 \rho d\Omega^2. \quad (88)$$

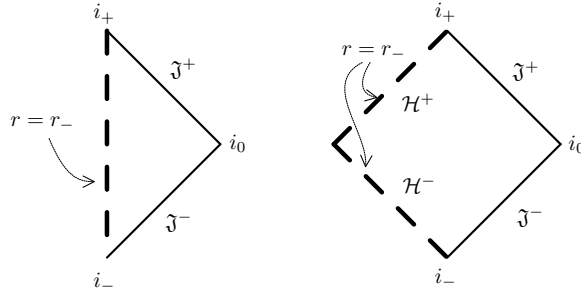


Рис. 5: Диаграммы Пенроуза дилатонной чёрной дыры

Можно показать, что параметр  $r_0$  определяется магнитным или электрическим зарядом чёрной дыры, а  $b \propto M$ .

Отметим, что в теории струн гиперповерхность  $r = r_{\pm}$  экстремального решения перестаёт быть сингулярной, и кривизна всюду оказывается конечной [7]. Более того, эта поверхность перестаёт быть горизонтом событий.

В заключение сравним решение (81) с решением Рейсснера–Нордстрёма. Оба они описывают чёрную дыру при достаточно малом отношении  $Q/M$  и «голую» сингулярность при закритическом значении отношения  $Q/M$ . Экстремальные решения существенно отличаются по своей структуре. Заметим, что даже при  $\varphi_0 = 0$  экстремальное решение для дилатонной дыры реализуется при отношении  $Q/M$  в  $\sqrt{2}$  раза больше, чем классическое решение, что связано с наличием дополнительных сил отталкивания, вызванных дилатонным полем [7]. Обе экстремальные метрики могут описывать решения, содержащие несколько чёрных дыр.

#### 4.4 Решение Керра

**Определение 9.** Асимптотически плоское пространство-время называется *осесимметричным*, если существует векторное поле Киллинга  $m$ , которое является пространственноподобным вблизи  $i_0$  и все интегральные кривые которого замкнуты.

Естественной нормировкой для такого векторного поля является требование  $m^2/r^2 \rightarrow 1$  при  $r \rightarrow \infty$ .

**Утверждение 9 (теорема Картера–Робинсона, Carter–Robinson).** Любое асимптотически плоское стационарное осесимметричное вакуумное пространство-время, не сингулярное на горизонте событий и всюду вне него, является членом двухпараметрического семейства Керра (Kerr).

Более того, можно показать [1, с. 77], что требование осесимметричности является избыточным.

Метрика решения Керра задаётся следующим выражением:

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dt^2 - 2a \sin^2 \theta \frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\Sigma} dt d\varphi + \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (89)$$

где

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (90)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad (91)$$

$$a = J/M, \quad (92)$$

а параметры  $M$  и  $J$  отождествляются с массой и угловым моментом соответственно.

Хотя, в отличие от решения Шварцшильда, не известно ни одного распределения масс, кроме  $T_{\mu\nu} \equiv 0$ , для которого решение Керра было бы точным, оно считается хорошим приближением реального массивного вращающегося тела.

Метрика Керра имеет координатную сингулярность при  $\theta = 0, \theta = \pi$  и  $\Delta = 0$ . Последний случай рассматривается аналогично решению Рейсснера–Нордстрёма:

$$\Delta = (r - r_+)(r - r_-), \quad (93)$$

где

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}, \quad (94)$$

и, как и раньше, возможны три принципиально различных случая, которые мы рассмотрим по отдельности.

#### 4.4.1 $M^2 < a^2$ , «голая» сингулярность

В этом случае уравнение  $\Delta = 0$  не имеет действительных корней. Метрика (89) имеет координатную сингулярность при  $\theta = 0$  (случай  $\theta = \pi$  полностью аналогичен) и неустраимую сингулярность при  $\Sigma = 0$ , или

$$r = 0, \quad \theta = \pi/2. \quad (95)$$

Введём координаты Керра–Шилда (*Kerr–Schild*)  $(\tilde{t}, x, y, z)$ :

$$x + iy = (r + ia) \sin \theta \exp \left\{ i \int \left( d\varphi + \frac{a}{\Delta} dr \right) \right\}, \quad (96)$$

$$z = r \cos \theta, \quad (97)$$

$$\tilde{t} = \int \left( dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr \right) - r. \quad (98)$$

Координатная сингулярность  $\theta = 0$  в них исчезает. Можно показать [1, с. 79–80], что сингулярность  $\Sigma = 0$  в координатах Керра–Шилда соответствует кольцу

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0. \quad (99)$$

Кроме того, метрика может быть аналитически продолжена на  $r < 0$ .

Для сечений  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$  оказывается возможным нарисовать псевдодвумерные диаграммы Пенроуза, поскольку геодезические, касательные к этим подмногообразиям при некотором значении аффинного параметра сохраняют это свойство на всём своём протяжении. Каждая точка диаграммы  $\theta = \pi/2$  представляет окружность  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , каждая входящая радиальная геодезическая попадает на «голую» сингулярность при  $r = 0$ .

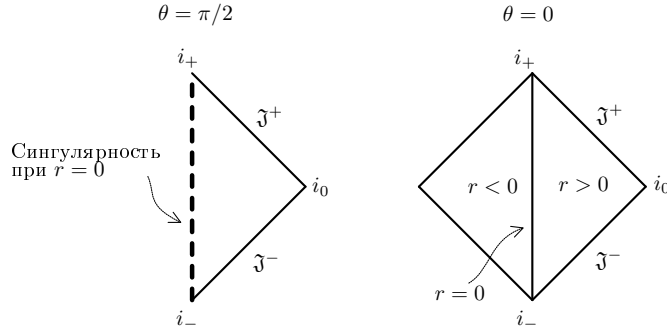


Рис. 6: Диаграмма Пенроуза решения Керра при  $M^2 < a^2$

Диаграмма  $\theta = 0$  описывает геодезические, идущие вдоль оси вращения; каждая из них попадает в область  $r < 0$ .

Уже тот факт, что решение порождает «голую» сингулярность, говорит о его физической несостоятельности в силу постулата о космической цензуре. Приведём здесь ещё одно соображение. Рассмотрим векторное поле Киллинга  $m = \partial/\partial\varphi$ .

$$m^2 = g_{\varphi\varphi} = a^2 \sin^2 \theta \left( 1 + \frac{r^2}{a^2} \right) + \frac{Ma^2}{r} \frac{2 \sin^4 \theta}{1 + a^2/r^2 \cdot \cos^2 \theta}. \quad (100)$$

Пусть  $r/a = \delta$  и  $\theta = \pi/2 + \delta$ . Тогда

$$m^2 = a^2 + \frac{Ma}{\delta} + \mathcal{O}(\delta), \quad \delta \ll 1, \quad (101)$$

т.е. при достаточно малом по модулю отрицательном  $\delta$  вектор  $m$  становится времениподобным. Однако интегральные кривые векторного поля  $m$  замкнуты, что нарушает принцип причинности. Более того, эти кривые могут быть деформированы так, что будут проходить через любую точку пространства-времени [1, с. 82].

Окончательно, отбрасываем этот случай как физически невозможный.

#### 4.4.2 $M^2 > a^2$

Как и в предыдущем случае, имеется кольцевая сингулярность при  $\Sigma = 0$ , но она скрыта под двумя горизонтами, отвечающими уравнению  $\Delta = 0$ . Сингулярность метрики (89) при  $\Delta = 0$  является координатной, что можно показать, записав метрику в *координатах Керра (Kerr)*  $(v, r, \theta, \chi)$ , где

$$dv = dt + \frac{r^2 - a^2}{\Delta} dr, \quad (102)$$

$$d\chi = d\varphi + \frac{a}{\Delta} dr \quad (103)$$

(см. [1, с. 83]).

**Утверждение 10.** Гиперповерхности  $r = r_{\pm}$  являются горизонтами Киллинга векторов Киллинга

$$\xi_{\pm} = k + \frac{a}{r_{\pm}^2 + a^2} m. \quad (104)$$

Поверхностная гравитация на них равна

$$\kappa_{\pm} = \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{2(r_{\pm}^2 + a^2)}. \quad (105)$$

Доказательство воспроизводит использованную ранее схему, и поэтому будет опущено.

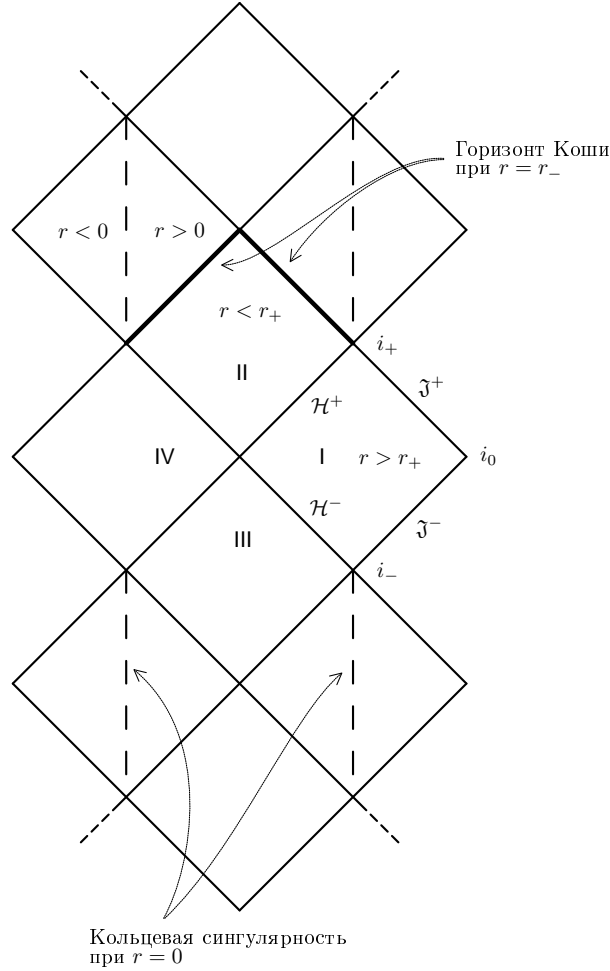


Рис. 7: Диаграмма Пенроуза решения Керра при  $M^2 > a^2$

Вводя координаты типа Крускала–Зекереса в окрестности каждого из горизонтов, можно построить диаграммы Пенроуза для сечений  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$  аналогично тому, как мы это сделали для решения Рейсснера–Нордстрёма. Обе диаграммы можно скомбинировать в одну, изображённую на рис. 7, если считать, что геодезические, идущие вдоль оси симметрии, минуют сингулярность при  $r = 0$  и попадают в область  $r < 0$ , а радиальные геодезические, лежащие в плоскости вращения, попадают в сингулярность. Представленная диаграмма неограниченно продолжается во времени в обе стороны.

Согласно утверждению 10, горизонт событий является горизонтом Киллинга для вектора

$$\xi = k + \Omega_H m, \quad (106)$$

где

$$\Omega_H = \frac{a}{r_+^2 + a^2} = \frac{J}{2M(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2})}. \quad (107)$$

Тривиальным образом показывается, что интегральная кривая векторного поля  $\xi$  задаётся выражением

$$\varphi = \pm \Omega_H t + \text{const}. \quad (108)$$

Статические частицы располагаются на интегральных кривых поля  $k$ , на которых  $\varphi = \text{const}$ , а частицы, находящиеся на интегральных кривых поля  $\xi$ , движутся относительно них с угловой скоростью  $\Omega_H$ . Это означает, что генератор гиперповерхности  $\mathcal{H}^+$  движется с той же угловой скоростью относительно бесконечно удалённого покоящегося наблюдателя, что может быть интерпретировано как вращение чёрной дыры с угловой скоростью  $\Omega_H$ .

Вектор  $k$  времениподобен в окрестности  $i_0$ , но он может становиться пространственноподобным вне горизонта событий. Действительно,

$$k^2 = g_{tt} = - \left( 1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right), \quad (109)$$

и  $k$  времениподобен при

$$r > M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (110)$$

Граница этой области называется *эргосферой*. Эта особенность вектора  $k$  лежит в основе процесса Пенроуза [1].

#### 4.4.3 $M^2 = a^2$ , экстремальное решение

Можно рассматривать это решение как вырожденный случай решения  $M^2 > a^2$ . Тогда  $r_+ = r_- = r = M$  есть горизонт Киллинга вектора

$$\xi = k + \Omega_H m, \quad (111)$$

где

$$\Omega_H = \frac{J}{2M^3} = \frac{1}{2M}. \quad (112)$$

А диаграмма Пенроуза приобретает вид, представленный на рис. 8.

## 5 Механика чёрных дыр

### 5.1 Геодезические конгруэнтности

#### 5.1.1 Основные понятия

**Определение 10.** *Конгруэнтностью* будем называть такое семейство кривых, что через каждую точку в некоторой области проходит одна и при том только одна кривая семейства.

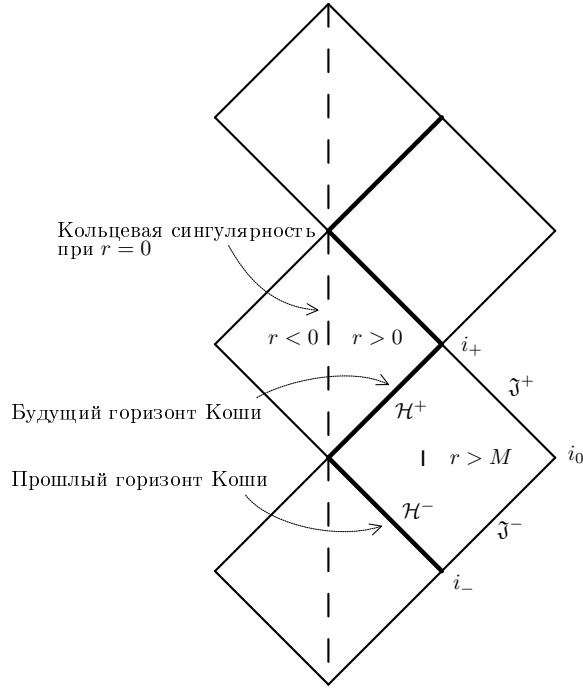


Рис. 8: Диаграмма Пенроуза экстремального решения Керра

Ниже мы будем рассматривать только *геодезические конгруэнтности*. Семейство геодезических конгруэнтности задаётся трёхпараметрическим уравнением

$$x^\mu = x^\mu(\lambda, y^\alpha), \quad (113)$$

где  $y^\alpha$ ,  $\alpha = \overline{0, 2}$  выделяют конкретную геодезическую, а  $\lambda$  есть её аффинный параметр. Вектор

$$t = \frac{d}{d\lambda} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda} \partial_\mu \quad (114)$$

является касательным к геодезической, а векторы сдвига

$$\eta_\alpha = \frac{d}{dy^\alpha} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \partial_\mu \quad (115)$$

параметризуют семейство. Легко видеть, что  $t$  и  $\eta_\alpha$  коммутируют:

$$t^\nu \partial_\nu \eta_\alpha^\mu - \eta_\alpha^\nu \partial_\nu t^\mu = \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} - \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda} = 0. \quad (116)$$

Тогда

$$0 = t^\nu (\partial_\nu \eta_\alpha^\mu + \Gamma_{\sigma\nu}{}^\mu \eta_\alpha^\sigma) - \eta_\alpha^\nu (\partial_\nu t^\mu + \Gamma_{\sigma\nu}{}^\mu t^\sigma) = t^\nu D_\nu \eta_\alpha^\mu - \eta_\alpha^\nu D_\nu t^\mu. \quad (117)$$

Обозначив

$$B^\mu{}_\nu \stackrel{\text{def}}{=} D_\nu t^\mu, \quad (118)$$

перепишем (117) в виде

$$t^\nu D_\nu \eta_\alpha^\mu = B^\mu{}_\nu \eta_\alpha^\nu. \quad (119)$$



Величина  $B^\mu{}_\nu$  характеризует величину *девиации* соседних геодезических.

Заметим, что (117) и, следовательно, (119) остаются верными и для любого  $\eta'_\alpha = \eta_\alpha + at$ . Для конгруэнтности времениподобных геодезических эту неоднозначность можно устранить, введя дополнительное требование

$$\eta \cdot t = 0. \quad (120)$$

Дифференцируя это выражение вдоль геодезической и учитывая (117), легко показать [1, с. 103], что если это условие выполнено где-то на геодезической, то оно остаётся верным всюду на ней.

Для конгруэнтности времениподобных геодезических это требование недостаточно. В этом случае существует лишь два вектора  $\eta^{(1)}$ ,  $\eta^{(2)}$ , ортогональных  $t$  и не совпадающих с ним. Поэтому для параметризации трёхмерного пространства геодезических конгруэнтности приходится вводить некоторый вектор  $n$ , не ортогональный  $t$ . Оказывается удобным выбрать его так, что

$$n^2 = 0, \quad n \cdot t = -1. \quad (121)$$

Для выполнения этих соотношений вдоль геодезической достаточно потребовать, чтобы

$$t^\nu D_\nu n^\mu = 0. \quad (122)$$

Зафиксировав таким образом  $n$ , рассмотрим пространство  $T_\perp$  векторов, перпендикулярных одновременно  $t$  и  $n$ . Выберем тогда  $\eta^{(1)}$  и  $\eta^{(2)}$  так, чтобы они образовывали базис этого пространства. Тогда если

$$P^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + n^\mu t_\nu + t^\mu n_\nu \quad (123)$$

— проектор на  $T_\perp$ , то  $P \cdot \eta = \eta$ . Можно показать [1, с. 105], что если для некоторого значения аффинного параметра  $\eta \in T_\perp$ , то это утверждение остаётся верным вдоль всей геодезической.

### 5.1.2 Свойства геодезических конгруэнтностей

Дав понятие о геодезических конгруэнтностях, укажем некоторые их свойства. Т.к. материал настоящего раздела лежит несколько в стороне от основной темы работы, ограничимся лишь формулировками. Доказательства можно найти в [1].

Пусть

$$\hat{B}^\mu{}_\nu = P^\mu{}_\lambda B^\lambda{}_\rho P^\rho{}_\nu, \quad (124)$$

где величины  $P^\mu{}_\nu$  и  $B^\mu{}_\nu$  определены в (123) и (118) соответственно. Можно написать, что

$$\hat{B}^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}\theta P^\mu{}_\nu + \hat{\sigma}^\mu{}_\nu + \hat{\omega}^\mu{}_\nu, \quad (125)$$

где

$$\theta = B^\mu{}_\mu, \quad (126)$$

$$\hat{\sigma}_{\mu\nu} = \hat{B}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}\theta P_{\mu\nu}, \quad (127)$$

$$\hat{\omega}_{\mu\nu} = \hat{B}_{[\mu\nu]}. \quad (128)$$

**Утверждение 11.** Если  $\hat{\omega}_{\mu\nu} = 0$ , то существует семейство нуль-гиперповерхностей, для которых касательные векторы  $t$  геодезических конгруэнтности являются нормальными. И обратно: если существует семейство нуль-гиперповерхностей таких, что векторы  $t$  являются их нормальными, то  $\hat{\omega}_{\mu\nu} = 0$ .

Величина элемента площади  $a$ , построенного на векторах  $\eta^{(1)}$ ,  $\eta^{(2)}$  в пространстве  $T_\perp$ , равна

$$a = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} t_\mu n_\nu \eta_\rho^{(1)} \eta_\sigma^{(2)}. \quad (129)$$

**Утверждение 12.** Если  $a$  — элемент площади конгруэнтности, то

$$\frac{da}{d\lambda} = \theta a. \quad (130)$$

**Утверждение 13 (Уравнение Райчаудхури, Raychaudhuri).** Для конгруэнтности изотропных геодезических справедлива следующая формула, называемая *уравнением Райчаудхури*:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \hat{\sigma}^{\mu\nu}\hat{\sigma}_{\mu\nu} + \hat{\omega}^{\mu\nu}\hat{\omega}_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}t^\mu t^\nu. \quad (131)$$

**Утверждение 14.** Пусть тензор энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$  в некотором пространстве-времени удовлетворяет слабому энергетическому условию (см. определение 12 на с. 30). Тогда на генераторе некоторой нуль-гиперповерхности  $\mathcal{N}$

$$\frac{d\theta}{d\lambda} \leq -\frac{1}{2}\theta^2. \quad (132)$$

**Утверждение 15.** Пусть  $\gamma$  — генератор некоторой нуль-гиперповерхности и пусть  $\theta = \theta_0 < 0$  в некоторой точке  $p \in \gamma$ . Выберем аффинный параметр  $\lambda$  так, чтобы точка  $p$  соответствовала значению  $\lambda = 0$ . Тогда  $\theta \rightarrow -\infty$  при конечном значении  $\lambda$ , не превышающем  $2/|\theta_0|$ .

Величина  $\theta$ , согласно (130) характеризует расхождение геодезических. Тогда  $\theta \rightarrow -\infty$  интерпретируется как фокусировка геодезических в точку или в каустику.

**Утверждение 16.** На горизонте Киллинга величина  $\theta$  постоянна.

**Утверждение 17.** Пусть  $\mathcal{N}$  — горизонт Киллинга вектора Киллинга  $\xi$ . Тогда

$$R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu|_{\mathcal{N}} = 0. \quad (133)$$

## 5.2 Интегралы Комара

Кратко дадим понятие об *интегралах Комара (Komar integrals)*, т.к. они потребуются для изложения следующего раздела. Более подробную информацию можно найти в [1].

Рассмотрим пространственный объём  $V$  на пространственно-подобной гиперповерхности  $\Sigma$ ,  $\partial V$  — его граница. Поставим в соответствие векторному полю Киллинга  $\xi$  величину

$$Q_\xi(V) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{C}{16\pi G} \oint_{\partial V} dS_{\mu\nu} D^\mu \xi^\nu, \quad (134)$$

где  $C$  — вещественная константа, а  $dS_{\mu\nu}$  — элемент площади поверхности  $\partial V$ . Это и есть определение интеграла Комара. Применяя к (134) формулу Остроградского–Гаусса, найдём:

$$Q_\xi(V) = \frac{C}{8\pi G} \int_V dS_\mu D_\nu D^\mu \xi^\nu. \quad (135)$$

Можно показать (см. [1, с. 97–98]), что величина  $Q_\xi$  не изменяется во времени.

Энергия и угловой момент могут быть выражены через интегралы Комара следующим образом (см. там же):

$$E(V) = -\frac{1}{8\pi G} \oint_{\partial V} dS_{\mu\nu} D^\mu k^\nu, \quad (136)$$

$$J(V) = \frac{1}{16\pi G} \oint_{\partial V} dS_{\mu\nu} D^\mu m^\nu, \quad (137)$$

где  $k = \partial/\partial t$  и  $m = \partial/\partial\varphi$  — векторы Киллинга, соответствующие трансляции во времени и повороту соответственно.

### 5.3 Законы механики чёрных дыр

#### 5.3.1 Нулевой закон

**Определение 11.** Будем говорить, что тензор энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$  в некотором пространстве-времени удовлетворяет *доминантному энергетическому условию*, если для любого направленного в будущее времениподобного векторного поля  $v$  векторное поле

$$j(v) \stackrel{\text{def}}{=} -v^\mu T_\mu{}^\nu \partial_\nu \quad (138)$$

является направленным в будущее изотропным или времениподобным либо исчезает.

**Утверждение 18 (нулевой закон).** Если тензор энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$  подчиняется доминантному энергетическому условию, то поверхностная гравитация является константой на будущем горизонте событий.

**Доказательство.** Согласно теореме Хокинга (см. с. 6), будущий горизонт событий  $\mathcal{H}^+$  является горизонтом Киллинга для некоторого вектора Киллинга  $\xi$ . Т.к. по определению горизонт Киллинга является нуль-гиперповерхностью,  $\xi^2 = 0$  на  $\mathcal{H}^+$ . Подставляя уравнение Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad (139)$$

в выражение (133), находим

$$0 = -T_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu \Big|_{\mathcal{H}^+} \equiv J_\mu \xi^\mu \Big|_{\mathcal{H}^+}, \quad (140)$$

откуда следует, что вектор  $J = -T^\mu{}_\nu \partial_\mu$  касателен к  $\mathcal{H}^+$ . Тогда он может быть разложен по базису касательных векторов:

$$J = a\xi + b_1\eta^{(1)} + b_2\eta^{(2)}. \quad (141)$$

Вычисляя  $J^2$  и учитывая, что  $\xi^\mu \eta_\mu^{(i)} = 0$ , убеждаемся, что вектор  $J$  может быть пространственноподобным или изотропным. Однако изотропный вектор Киллинга  $\xi$  может быть рассмотрен как предел времениподобных векторов; тогда из определения  $J$  и доминантного энергетического условия можно утверждать, что  $J$  может быть только пространственноподобным или изотропным. Значит,  $J$  изотропен и, следовательно,  $J = a\xi$ . Тогда

$$0 = \xi_{[\sigma} J_{\rho]}|_{\mathcal{H}^+} = -\xi_{[\sigma} T_{\rho]}{}^\lambda \xi^\lambda|_{\mathcal{H}^+} = \xi_{[\sigma} R_{\rho]}{}^\lambda \xi^\lambda|_{\mathcal{H}^+} \quad (142)$$

(в последнем переходе опять используем уравнение Эйнштейна (139)). Отсюда следует, что

$$\xi_{[\rho} \partial_{\sigma]} \kappa|_{\mathcal{H}^+} = 0. \quad (143)$$

Доказательство последнего перехода весьма объёмно, его можно найти в [1]. В силу последнего утверждения  $\partial_\sigma \kappa \propto \xi_\sigma$ , откуда для любого касательного к  $\mathcal{H}^+$  вектора  $t$  можно записать:

$$t \partial \kappa|_{\mathcal{H}^+} = 0, \quad (144)$$

т.е. величина  $\kappa$  есть константа на  $\mathcal{H}^+$ .  $\square$

Полное доказательство этой теоремы, выполненное в рамках тетрадного формализма, можно найти в [5].

### 5.3.2 Формула Смарра

Пусть  $\Sigma$  — пространственноподобная гиперповерхность<sup>6</sup> в стационарном внешнем пространстве-времени чёрной дыры. Её границами являются пространственная бесконечность  $i_0$  и 2-сфера  $H$ , представляющая собой пространственную часть будущего горизонта событий  $\mathcal{H}^+$ . Поверхность  $H$  является «границей» чёрной дыры в пространстве  $\Sigma$ .

Запишем суммарный угловой момент с помощью интегралов Комара (137):

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{16\pi G} \oint_H dS_{\mu\nu} D^\mu m^\nu + \frac{1}{8\pi G} \int_\Sigma dS_\mu D_\nu D^\mu m^\nu = \\ &= J_H + \frac{1}{8\pi G} \int_\Sigma dS_\mu R^\mu{}_\nu m^\nu. \end{aligned} \quad (145)$$

Здесь мы обозначили первый интеграл за  $J_H$  и использовали свойство векторов Киллинга, согласно которому

$$D_\nu D_\mu \xi^\nu = R_{\mu\nu} \xi^\nu, \quad (146)$$

где  $R_{\mu\nu}$  обозначает тензор Риччи (см. [1, с. 97]).

<sup>6</sup>Под пространственноподобной гиперповерхностью понимается частная поверхность Коши.

Перепишем (145) с учётом уравнения Эйнштейна (139):

$$J = \int_{\Sigma} dS_{\mu} \left( T^{\mu}_{\nu} m^{\nu} - \frac{1}{2} T m^{\mu} \right) + J_H. \quad (147)$$

Будем считать, что в пространстве  $\Sigma$  нет другой материи, кроме электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}$ . Тензор энергии-импульса для него имеет нулевой след:  $g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}(F) = 0$  (см., например, [11, с. 118]). Тогда

$$J = \int_{\Sigma} dS_{\mu} T^{\mu}_{\nu}(F) m^{\nu} + J_H. \quad (148)$$

Аналогично запишем для энергии:

$$\begin{aligned} M &= -\frac{1}{4\pi G} \int_{\Sigma} dS_{\mu} R^{\mu}_{\nu} k^{\nu} - \frac{1}{8\pi G} \oint_H dS_{\mu\nu} D^{\mu} k^{\nu} = \\ &= -2 \int_{\Sigma} dS_{\mu} \left( T^{\mu}_{\nu} k^{\nu} - \frac{1}{2} T k^{\mu} \right) - \frac{1}{8\pi G} \oint_H dS_{\mu\nu} (D^{\mu} \xi^{\nu} - \Omega_H D^{\mu} m^{\nu}) \end{aligned} \quad (149)$$

Мы подставили во втором интеграле  $\xi = k + \Omega_H m$ . Подставляя теперь  $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(F)$ , находим:

$$M = -2 \int_{\Sigma} dS_{\mu} T^{\mu}_{\nu}(F) k^{\nu} + 2\Omega_H J - \frac{1}{8\pi G} \oint_H dS_{\mu\nu} D^{\mu} \xi^{\nu}. \quad (150)$$

Рассмотрим случай незаряженной чёрной дыры ( $T_{\mu\nu}(F) = 0$ ). Последнее выражение запишется тогда следующим образом:

$$M = 2\Omega_H J - \frac{1}{8\pi G} \oint_H dS_{\mu\nu} D^{\mu} \xi^{\nu}. \quad (151)$$

Можно показать [1, с. 111], что на  $H$

$$dS_{\mu\nu} = (\xi_{\mu} n_{\nu} - \xi_{\nu} n_{\mu}) dA, \quad (152)$$

где ковектор  $n$  выбран так, что  $n \cdot \xi = -1$ , а  $dA$  — площадь элемента поверхности  $H$ . Подставляя  $dS_{\mu\nu}$  и учитывая (122) в первом переходе, получим:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8\pi G} \oint_H dS_{\mu\nu} D^{\mu} \xi^{\nu} &= -\frac{1}{4\pi G} \oint_H dA (\xi \cdot D \xi^{\nu}) n_{\nu} = \\ &= -\frac{\kappa}{4\pi G} \oint_H dA \xi \cdot n = \frac{\kappa A}{4\pi G} \end{aligned} \quad (153)$$

(мы использовали нулевой закон, чтобы вынести  $\kappa$  из-под знака интеграла, и обозначили буквой  $A$  полную площадь горизонта).

Полученное выражение называется *формулой Смарра (Smarr)*:

$$M = \frac{\kappa A}{4\pi} + 2\Omega_H J, \quad (154)$$

где выбрано  $G = 1$ . Её обобщением на случай заряженной чёрной дыры является следующая формула (см. [1]):

$$M = \frac{\kappa A}{4\pi} + 2\Omega_H J + \Phi_H Q. \quad (155)$$

Величина  $\Phi_H$  называется *совращающимся электрическим потенциалом* и определяется через обычный четырёхмерный потенциал следующим образом:

$$\Phi_H \stackrel{\text{def}}{=} \xi^\mu A_\mu|_H, \quad (156)$$

где, как и раньше,  $\xi = k + \Omega_H t$ . Можно показать, что  $\Phi_H$  постоянен на горизонте [5].

### 5.3.3 Первый закон

Рассмотрим чёрную дыру с массой  $M$ , зарядом  $Q$  и угловым моментом  $J$ . Пусть поверхностная гравитация на её будущем горизонте событий равна  $\kappa$ , её поверхностный электрический потенциал —  $\Phi_H$ , а угловая скорость —  $\Omega_H$ . Площадь «поверхности» составляет  $A$ . Пусть в результате некоторого процесса масса, заряд и угловой момент чёрной дыры изменяются и становятся равными  $(M + \delta M)$ ,  $(Q + \delta Q)$  и  $(J + \delta J)$  соответственно. Тогда

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ. \quad (157)$$

**Доказательство.** Докажем первый закон механики чёрных дыр для случая незаряженной дыры ( $Q = 0$ ). Доказательство для общего случая, не опирающееся к тому же на теоремы о единственности, можно найти в [2].

Согласно теореме о единственности, асимптотически плоское осесимметричное пространство-время, заполненное только электромагнитным полем и несингулярное на горизонте событий и во внешней области, принадлежит трёхпараметрическому *семейству Керра–Ньюмана*; параметрами семейства являются масса, заряд и угловой момент чёрной дыры. Тогда

$$M = M(A, J). \quad (158)$$

В используемой системе единиц ( $G = c = 1$ )  $A$  и  $J$  имеют размерность квадрата массы. Тогда функция  $M(A, J)$  должна быть однородной функцией<sup>7</sup> степени 1/2. По формуле Эйлера<sup>8</sup> имеем:

$$A \frac{\partial M}{\partial A} + J \frac{\partial M}{\partial J} = \frac{1}{2} M. \quad (159)$$

Т.к.  $A$  и  $J$  суть независимые параметры, сравнивая полученное выражение с формулой Смарра (154), находим:

$$\frac{\partial M}{\partial A} = \frac{\kappa}{8\pi} \quad (160)$$

$$\frac{\partial M}{\partial J} = \Omega_H, \quad (161)$$

<sup>7</sup>Функция  $f$  называется *однородной функцией* степени  $q$ , если  $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  и  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$   $f(\lambda \mathbf{v}) = \lambda^q f(\mathbf{v})$ .

<sup>8</sup>Формула Эйлера:

$$\mathbf{v} \nabla f(\mathbf{v}) = q \cdot f(\mathbf{v}).$$

См., например, [13].

что и доказывает первый закон для случая незаряженной чёрной дыры.  $\square$

#### 5.3.4 Второй закон

**Определение 12.** Будем говорить, что тензор энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$  в некотором пространстве-времени удовлетворяет *слабому энергетическому условию*, если для любого изотропного или времениподобного векторного поля  $v$

$$v^\mu v^\nu T_{\mu\nu} \geq 0. \quad (162)$$

**Утверждение 19 (второй закон, теорема Хокинга о площади горизонта событий).** Рассмотрим асимптотически плоское пространство-время. Если выполняется постулат о космической цензуре и тензор энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$  удовлетворяет слабому энергетическому условию, то площадь будущего горизонта событий этого пространства-времени в любом процессе не убывает<sup>9</sup>.

**Доказательство.** Гипотеза о космической цензуре подразумевает существование глобально гиперболического<sup>10</sup> подмногообразия пространства-времени, содержащего внешнее пространство и горизонт событий [1, с. 113]. Согласно *теореме Героха* (см. [1, с. 113]), в этом случае существует семейство гиперповерхностей Коши  $\Sigma(\lambda)$ , для которых

$$\lambda' > \lambda \Leftrightarrow \Sigma(\lambda') \subset D^+(\Sigma(\lambda)). \quad (163)$$

Рассмотрим генератор  $\gamma$  нуль-гиперповерхности  $\mathcal{H}^+$ . В качестве параметра  $\lambda$  указанного семейства можно выбрать аффинный параметр генератора. Площадь  $A(\lambda)$  горизонта есть площадь пересечения  $\mathcal{H}^+$  и  $\Sigma(\lambda)$ . Тогда нужно доказать, что

$$\lambda' > \lambda \Rightarrow A(\lambda') \geq A(\lambda). \quad (164)$$

Для этого достаточно доказать аналогичное утверждение для произвольного бесконечно малого элемента площади  $a$  поверхности  $H$ . В силу (130) для выполнения второго закона достаточно требования  $\theta \geq 0$ .

Допустим обратное: пусть  $\theta < 0$ . Выберем точку  $p \in \gamma$  и рассмотрим соседние с  $\gamma$  изотропные геодезические, проходящие через эту точку. Т.к.  $\theta < 0$ , они сфокусируются после прохождения  $p$ , в частности одна из них пересечёт  $\gamma$  в некоторой точке  $q$ , соответствующей конечному значению аффинного параметра. Согласно теореме Пенроуза (утверждение 5), генератор не может иметь будущих конечных точек. Значит, геодезическая  $\gamma$  продолжается за точку  $q$ . Но тогда её точки, лежащие за точкой  $q$ , и точка  $p$  могут быть соединены времениподобной кривой, что противоречит свойству 3 горизонта событий. Строгое доказательство возможности деформации ко времениподобной кривой можно найти в [3, с. 130].

Из полученного противоречия заключаем, что  $\theta \geq 0$ , что доказывает теорему.  $\square$

<sup>9</sup>Это утверждение верно лишь в рамках классического подхода. См. раздел 6.1.

<sup>10</sup>Многообразие  $\mathcal{M}$  называется *глобально гиперболическим*, если оно имеет поверхность Коши.

## 6 Излучение Хокинга и термодинамика чёрных дыр

Рассматриваемые в настоящем разделе вопросы требуют знакомства с квантовой теорией и неэйнштейновскими моделями гравитации. Приведём здесь лишь основные результаты на качественном уровне. Более подробную информацию и ссылки на другие источники можно найти, например, в [6].

### 6.1 Излучение Хокинга

Рассмотрим эволюцию некоторого пространства-времени от одного стационарного состояния к другому, не совпадающему с начальным. Пусть в процессе эволюции пространство-время не является статическим. Согласно строгому квантовомеханическому рассмотрению, выполненному, например, в [1], в этом случае возникают новые частицы. Примером такого процесса может служить гравитационный коллапс в чёрную дыру. В общем случае энергетический спектр возникающих частиц определяется деталями эволюции и может быть весьма произволен. Однако можно показать [6], что в случае эволюции от пространства-времени без горизонта к пространству-времени, имеющему горизонт, спектр возникающих частиц имеет тепловой характер. Именно этот случай реализуется при коллапсе звезды в чёрную дыру в системе отсчёта бесконечно удалённого наблюдателя. Возникающее тепловое излучение называется *излучением Хокинга*. Оно соответствует *температуре Хокинга*, равной

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (165)$$

где  $\kappa$  — поверхностная гравитация и используется естественная система единиц:

$$c = 1, \quad G = 1, \quad k = 1, \quad \hbar = 1. \quad (166)$$

Подчеркнём, что излучение Хокинга является квантовым эффектом.

Вместе с Хокинговским излучением чёрная дыра теряет энергию, определяемую законом Стефана–Больцмана:

$$\frac{dE}{dt} = -\sigma AT_H^4, \quad (167)$$

где

$$A \sim M^2 \quad (168)$$

— площадь чёрной дыры,

$$\sigma = \frac{\pi^2}{60} \quad (169)$$

— постоянная Стефана–Больцмана. Подставив (168) и (169) в (167) и учтя соотношение Эйнштейна  $E = M$ , а также оценку  $\kappa \sim 1/M$ , получим:

$$\frac{dM}{dt} \sim \frac{1}{M^2}, \quad (170)$$

что позволяет оценить время полного испарения чёрной дыры:

$$\tau \sim M^3 \quad (171)$$



или, в единицах СИ,

$$\tau \sim \frac{G^2}{\hbar c^4} M^3. \quad (172)$$

Однако полученный результат не может считаться корректным, поскольку на заключительных этапах испарения (при малой массе) перестаёт работать использованная квазиклассическая модель. В настоящее время не существует однозначной полной модели испарения чёрных дыр.

## 6.2 Термодинамика чёрных дыр

Перепишем первый закон механики чёрных дыр (157), подставив в него выражение для температуры Хокинга (165):

$$dM = T_H dS_{\text{BH}} + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ. \quad (173)$$

Величина

$$S_{\text{BH}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A}{4} \quad (174)$$

называется *энтропией чёрной дыры*, или *энтропией Бекенштейна–Хокинга* (*Beckenstein–Hawking*). Тогда выражение (173) отождествляется с первым началом термодинамики, если под двумя последними слагаемыми понимать работу внешней силы.

Температура Хокинга пропорциональна величине поверхностной гравитации, это позволяет связать нулевое начало термодинамики<sup>11</sup> с нулевым законом динамики чёрных дыр.

Смысл записи (174) есть формальное переобозначение. Однако введённая таким образом величина действительно обладает свойствами энтропии. Так, было показано [6], что при некоторых ограничениях на начальные условия величина

$$S = S_{\text{BH}} + S_{\text{ext}}, \quad (175)$$

где  $S_{\text{ext}}$  — энтропия вещества во внешнем пространстве, не убывает со временем. Хотя для общего случая это утверждение не доказано, оно полагается истинным и называется *обобщённым вторым законом термодинамики*.

Необходимость приписать чёрной дыре некоторую энтропию следует из указанной Бекенштейном возможности уменьшать энтропию внешнего пространства, бросая вещество в чёрную дыру. Кроме того, Хокинговское испарение чёрных дыр нарушает выведенный на основании неквантовых представлений второй закон механики чёрных дыр, но не нарушает обобщённый второй закон термодинамики, т.к. излучение Хокинга увеличивает энтропию окружающего пространства.

Вместе с тем введение энтропии чёрных дыр сталкивается с рядом трудностей, т.к. само понятие энтропии подразумевает наличие некоторых внутренних степеней свободы. Но в классической теории чёрная дыра полностью описывается тремя параметрами: массой, угловым моментом и электрическим зарядом, следовательно, классическое описание оказывается несовместимым с понятием энтропии. В литературе существует множество попыток интерпретации энтропии в рамках неэйнштейновских моделей гравитации

<sup>11</sup>В состоянии термодинамического равновесия все части системы имеют одинаковую температуру.

[6, 5], однако вопрос о выборе корректного описания до настоящего времени остаётся открытым.

Наконец, существует утверждение, аналогичное третьему началу термодинамики: температуру чёрной дыры невозможно обратить в нуль посредством любого конечного числа операций. Это утверждение иногда называется *третьим законом динамики чёрных дыр*. Утверждение основано на предположении о невозможности превращения превращения чёрной дыры в экстремальную за конечное число шагов и тесно связано с запретом возникновения «голой» сингулярности [5]. Тем не менее, оно доказано лишь в некоторых частных случаях.

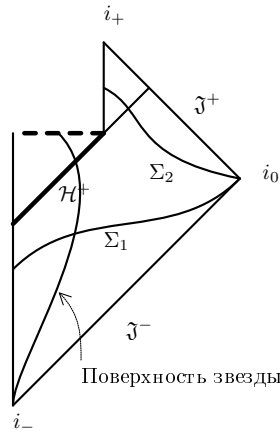


Рис. 9: Информационный парадокс

**Информационный парадокс** С проблемами энтропии чёрных дыр тесно связан информационный парадокс. Рассмотрим чёрную дыру, формирующуюся в результате гравитационного коллапса и испаряющуюся за конечное время. Диаграмма Пенроуза этого процесса приведена на рис. 9. Здесь  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  — две частные поверхности Коши. Существуют времениподобные кривые, которые пересекают  $\Sigma_1$ , но попадают на центральную сингулярность и, следовательно, не пересекают  $\Sigma_2$ . Т.о., часть информации оказывается «потерянной». Это означает неунитарную эволюцию пространства-времени от  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , что противоречит принципам квантовой механики. Это явление может быть интерпретировано так, что гравитация вносит новый уровень неопределённости, отличной от квантовомеханической [12, с. 39].

Вместе с тем сама возможность реализации информационного парадокса ставится под сомнение [6]. Так, нельзя утверждать ничего конкретного об исчезновении информации, пока не решена проблема центральной сингулярности. Кроме того, как уже отмечалось, квазиклассическое описание финальной стадии испарения чёрных дыр не является корректным. В настоящее время вопрос об информационном парадоксе остаётся открытым.

## Список литературы

- [1] Townsend P.K. Black holes. arXiv: gr-qc/9707012v1.
- [2] Compère G. An introduction to the mechanics of black holes. arXiv: gr-qc/0611129v1.
- [3] Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: МИР, 1977.
- [4] Holten van J.W. Gravitational waves and black holes. arXiv: gr-qc/9704043v1.
- [5] Новиков И.Д., Фролов В.П. Физика чёрных дыр. М.: НАУКА, 1986.
- [6] Padmanabhan T. Gravity and the thermodynamics of horizons. arXiv: gr-qc/0311036v2.
- [7] Garfinkle D., Horowitz G.T., Strominger A. Phys. Rev. D. **43**, 3140 (1991).
- [8] Peet A.W. TASI lectures on black holes in string theory. arXiv: hep-th/0008241v2.
- [9] Clément G., Gal'tsov D., Leygnac C. Linear dilaton black holes. arXiv: hep-th/0208225v3.
- [10] Вейнберг С. Гравитация и космология. Волгоград: ПЛАТОН, 2000.
- [11] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
- [12] Hawking S. arXiv: hep-th/9409195v1.
- [13] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1.