Ответы к вопросам зачёта по курсу «Теоретическая механика» в 4-ом семестре (2008 г.)

Редакция №3, 21 мая 2008 г.

Disclaimer. Я проверил этот документ, но тем не менее здесь могут содержаться ошибки. Вы используете материал этого документа на свой риск. Об обнаруженных ошибках и неточностях можете сообщать по адресу `dreamfarer@mail.ru` или пользователю Andre на `http://forum.dubinushka.ru`. Документ может распространяться свободно, вносить изменения запрещается.

А.А. Попов.

Вопрос №1. *Цилиндрические координаты. Орты. Выражения для радиус-вектора, скорости, градиента и ускорения точки. Связь цилиндрических и декартовых координат.*

Картинку сами нарисуете. Названия ортов: $\mathbf{e}_\rho$ — радиальный, $\mathbf{e}_\varphi$ — угловой, или трансверсальный, $\mathbf{e}_z$ — вертикальный. Орты образуют правую тройку в следующей последовательности: $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$.

$$\begin{gathered}
\mathbf{r} = \rho\,\mathbf{e}_\rho + z\,\mathbf{e}_z,\\
\dot{\mathbf{r}} = \dot\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\dot\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + \dot z\,\mathbf{e}_z,\\
\boldsymbol{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\,\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\,\mathbf{e}_z,\\
\ddot{\mathbf{r}} = \left(\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2\right)\,\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot\varphi\right)\,\mathbf{e}_\varphi + \ddot z\,\mathbf{e}_z.
\end{gathered}$$

Выражение декартовых координат через цилиндрические:

$$\begin{gathered}
x = \rho\cos\varphi,\\
y = \rho\sin\varphi,\\
z = z.
\end{gathered}$$

Вопрос №2. *Сферические координаты. Орты. Выражения для радиус-вектора, скорости точки и градиента. Связь сферических и декартовых координат.*

Картинку сами нарисуете. Орты образуют правую тройку в следующей последовательности: $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi\}$.

$$\begin{gathered}
\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r,\\
\dot{\mathbf{r}} = \dot r\,\mathbf{e}_r + r\dot\vartheta\,\mathbf{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\,\dot\varphi\,\mathbf{e}_\varphi,\\
\boldsymbol{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial r}\,\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\,\mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\mathbf{e}_\varphi.
\end{gathered}$$

Выражение декартовых координат через сферические:

$$\begin{gathered}
x = r\sin\vartheta\cos\varphi,\\
y = r\sin\vartheta\sin\varphi,\\
z = r\cos\vartheta.
\end{gathered}$$

Вопрос №3. *Естественные координаты и оси. Выражения для скорости и ускорения.*

Пусть траектория материальной точки задаётся выражением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, где s — длина дуги траектории. Выберем векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ так, что

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds},$$

а $\mathbf{n}$ ортогонален $\boldsymbol{\tau}$ и направлен в сторону вогнутости траектории. В качестве третьего орта возьмём вектор бинормали

$$\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}].$$

Тогда

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\tau}\dot{s},$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{R}\mathbf{n} \quad \textit{(формула Гюйгенса)},$$

где

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{R}\mathbf{n},$$

а R — радиус кривизны траектории.

Вопрос №4. *Общие теоремы динамики материальной точки. Импульс, угловой момент, полная и потенциальная энергии материальной точки (определения), связь силы и потенциальной энергии; теоремы об изменении импульса, углового момента и энергии. Первые интегралы движения.*

Определения (нерелятивистская механика):

$$\mathbf{p} \equiv m\dot{\mathbf{r}} \quad \textit{— импульс},$$

$$\mathbf{L} \equiv [\mathbf{r}, \mathbf{p}] \quad \textit{— угловой момент},$$

$$T \equiv m\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2} \quad \textit{— кинетическая энергия}.$$

Потенциальной называется сила, для которой можно записать:

$$\mathbf{F}^P = -\boldsymbol{\nabla} U(\mathbf{r}, t),$$

функция $U(\mathbf{r}, t)$ назвается *потенциалом*, или *потенциальной энергией*. *Полной* энергией называется сумма кинетической и потенциальной. Теоремы об изменении:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F},$$

$$\dot{\mathbf{L}} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}],$$

$$\dot{E} = \frac{d}{dt}(T + U) = \frac{\partial U}{\partial t} + \left(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{F}^D\right).$$

Если существует функция f:

$$f = f(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t),$$

являющаяся константной в силу второго закона Ньютона или его следствий, она называется *интегралом движения*.

Вопрос №5. *Движение точки в центральном поле. Интегралы движения. Плоское движение. Эффективная энергия. Закон движения. Траектория точки.*

Центральным называется стационарное поле, зависящее только от $|\mathbf{r}|$. В таком поле угловой момент $\mathbf{L}$ и полная энергия E являются интегралами движения. Тогда т.к.

$$(\mathbf{r}, \mathbf{L}) = 0 \quad \forall \mathbf{r}$$

движение является плоским. *Эффективная потенциальная энергия:*

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{L_0^2}{2mr^2}.$$

Закон движения в квадратурах:

$$t - t_0 = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0 - U_{eff}(r)\right)}},$$

где E_0 — полная энергия. Уравнение траектории в квадратурах:

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \frac{L_0}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr/r^2}{\sqrt{E_0 - U_{eff}(r)}}.$$

Вопрос №6. *Дифференциальное сечение рассеяния частиц на силовом центре. Определение. Формула для расчета.*

Дифференциальное сечение рассеяния — это величина

$$d\sigma = \frac{dN}{j},$$

где dN — число частиц, рассеиваемых за единицу времени на углы рассеяния, лежащие в интервале $(\vartheta, \vartheta + d\vartheta)$, а j — плотность потока, т.е. число частиц, проходящих за единицу времени через единичную нормальную площадку.

$$d\sigma = 2\pi p(\vartheta) dp,$$

где p — прицельный параметр.

Вопрос №7. *Идеальные связи. Теорема об изменении энергии системы материальных точек в случае идеальных связей.*

Связь называется *идеальной*, если для неё виртуальная работа силы реакции равна нулю. В случае наличия связей законы изменения энергии, импульса и углового момента модифицируются. Так, закон изменения энергии для системы с идеальными голономными связями записывается следующим образом:

$$\dot{E} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{N} U_i + \sum_{i=1}^{N} \left(\mathbf{F}_i^D, \dot{\mathbf{r}}_i\right) - \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t},$$

где первые два слагаемых остались от закона изменения энергии для системы без связей (см. вопрос №4), индекс i нумерует частицы, индекс α — связи, λ_α — неопределённые множители Лагранжа, а связи задаются уравнениями

$$f_\alpha(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Вопрос №8. *Уравнения Лагранжа с реакциями связей.*

Система

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum\limits_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \boldsymbol{\nabla}_i f_\alpha, \\ f_\alpha(\mathbf{r}, t) = 0 \end{cases}$$

называется уравнениями Лагранжа I-ого рода. Здесь индекс i нумерует частицы системы, индекс α — связи системы (их k штук), λ_α — неопределённые множители Лагранжа, а второе уравнение системы есть уравнение голономной связи.

Вопрос №9. *Уравнения Лагранжа II рода. Условия применимости (голономные и идеальные связи - определения).*

Связь называется *идеальной*, если для неё виртуальная работа силы реакции равна нулю. Если связь не зависит от скоростей частиц системы, она называется *голономной*. Для голономных идеальных связей верно уравнение Лагранжа II-ого рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^D,$$

где $\mathcal{L} = T - U$ — функция Лагранжа, q_j — обобщённая координата, Q_j^D — обобщённая диссипативная сила.

Вопрос №10. *Уравнения Лагранжа II рода. Обобщенная диссипативная сила.*

Для системы с идеальными голономными связями верно уравнение Лагранжа II-ого рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^D,$$

где $\mathcal{L} = T - U$ — функция Лагранжа, q_j — обобщённая координата, Q_j^D — обобщённая диссипативная сила:

$$Q_j^D = \mathbf{F}_i^D \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

Вопрос №11. *Неоднозначность определения функции Лагранжа.*

Функция Лагранжа определяется с точностью до слагаемого, являющегося полной производной по времени произвольной функции координат и времени. Иными словами, если $\mathcal{L}$ есть функция Лагранжа некоторой системы, то

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt}\mathcal{F}(q, t)$$

также удовлетворяет уравнению Лагранжа. Кроме того, если в системе отсутствуют диссипативные силы, то функцию Лагранжа можно делить на любую постоянную величину.

Вопрос №12. *Обобщенный импульс (определение). Теоремы об изменении и сохранении об. импульса.*

Обобщённым импульсом называется величина

$$p_j \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}.$$

Из уравнения Лагранжа

$$\dot{p}_j = Q_j^D + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}.$$

Если нет диссипативных сил и если q_j — циклическая координата, т.е. если $\partial \mathcal{L}/\partial q_j = 0$, то $\dot{p}_j = 0$.

Вопрос №13. *Обобщенная энергия (определение). Теоремы об изменении и сохранении обобщенной энергии.*

Обобщённой энергией называется величина

$$E \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \mathcal{L}.$$

$$\dot{E} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \dot{q}_j Q_j^D.$$

Т.о., если нет диссипативных сил и если функция Лагранжа системы не зависит явным образом от времени, то обобщённая энергия сохраняется.

Вопрос №14. *Функция Лагранжа для частицы с массой m в потенциальном поле $U(\mathbf{r}, t)$ в а) декартовых, б) цилиндрических и в) сферических координатах.*

Декартовы координаты:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - U(x, y, z, t).$$

Цилиндрические координаты:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2\right) - U(\rho, \varphi, z, t).$$

Сферические координаты:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\vartheta})^2 + (r\sin\vartheta\,\dot{\varphi})^2\right) - U(r, \vartheta, \varphi, t).$$

Вопрос №15. *Функция Лагранжа для частицы с массой m в центральном поле (в сферических координатах).*

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\vartheta})^2 + (r\sin\vartheta\,\dot{\varphi})^2\right) - U(r).$$

Если непотенциальные силы не действуют на частицу, её движение оказывается плоским, и при надлежащей ориентации системы координат функция Лагранжа записывается следующим образом:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\vartheta})^2\right) - U(r).$$

Вопрос №16. *Функция Лагранжа одномерного осциллятора с массой m и частотой ω.*

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2.$$

Вопрос №17. *Функция Лагранжа математического маятника (l, m) в однородном поле тяжести $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$.*

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi.$$

Вопрос №18. *Функция Лагранжа двойного математического маятника $(m_1, l_1; m_2, l_2)$ в однородном поле тяжести $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$.*

$$\mathcal{L} = \frac{m_1 + m_2}{2}l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2}l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2)gl_1\cos\varphi_1 + m_2 g l_2\cos\varphi_2,$$

где углы φ_1 и φ_2 отсчитываются от вертикали, а точкой подвеса 2-ого маятника является груз 1-ого маятника.

Вопрос №19. *Функция Лагранжа системы из двух взаимодействующих частиц* (m_1, m_2).

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2}\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2, t),$$

где U — потенциал взаимодействия.

Вопрос №20. *Функция Лагранжа для частицы с массой* m *в однородном поле тяжести* $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$.

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz.$$

Вопрос №21. *Функция Лагранжа для частицы с массой* m *и зарядом* e *в неоднородных электромагнитных полях* $\mathbf{E}$ *и* $\mathbf{H}$ *(общая форма). Векторный и скалярный потенциал.*

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{e}{c}(\mathbf{A}, \dot{\mathbf{r}}) - e\varphi,$$

где $\mathbf{A}$ — векторный, а φ — скалярный потенциал электромагнитного поля. Они определяются так, что

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$
$$\mathbf{H} = [\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{A}].$$

Вопрос №22. *Функция Лагранжа для частицы с массой* m *и зарядом* e *в поле заряда* Q *(сферические координаты).*

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\vartheta})^2 + (r\sin\vartheta\,\dot{\varphi})^2\right) - \frac{eQ}{r}.$$

Вопрос №23. *Функция Лагранжа для частицы с массой* m *и зарядом* e *в постоянных и однородных полях* $\mathbf{E} = E_0\mathbf{e}_z$ *и* $\mathbf{H} = H_0\mathbf{e}_z$ *в а) декартовых, б) цилиндрических и в) сферических координатах.*

Декартовы координаты:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{eH_0}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x}) + eE_0 z.$$

Цилиндрические координаты:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{eH_0}{2c}\rho^2\dot{\varphi} + eE_0 z.$$

Сферические координаты:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\vartheta})^2 + (r\sin\vartheta\,\dot{\varphi})^2\right) + \frac{eH_0}{2c}r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi} + eE_0 r\cos\vartheta.$$